TD7

INTÉGRATION

Exercice 1 D'après **ESC** 2002.
On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f_n(x) = \frac{n\ln(x)}{n+1+nx^2}.$$

On définit, également sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction h par

$$h(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}.$$

Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1. Montrer que f_n et h sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier leur signe.
2. **a.** Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}dx$ est convergente et déterminer sa valeur.

   b. Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(x)dx$ est convergente.

Dans toute la suite de l'exercice, on note K l'intégrale impropre

$$K = \int_1^{+\infty} h(x)dx.$$

3. **a.** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 h(x)dx$ est convergente [1]

   b. En posant $u = \frac{1}{x}$, montrer que $K = -\displaystyle\int_0^1 h(u)du$.

   c. En déduire que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} |h(x)|\,dx$ converge et est égale à $2K$.

   d. En déduire également que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)dx$ converge et vaut 0.
4. **a.** Montrer que pour tout réel x strictement positif : $|f_n(x)| \leqslant |h(x)|$.

   En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.

   b. Montrer que, pour tout $x > 0$, $h(x) - f_n(x) = \frac{h(x)}{n+1+nx^2}$.

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

1. ou l'admettre puisque c'est hors programme.

c. En déduire successivement :
$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} (h(x) - f_n(x))\, dx \leqslant \frac{K}{n+1},$$
et
$$-\frac{K}{n+1} \leqslant \int_0^1 (h(x) - f_n(x))\, dx \leqslant\leqslant 0.$$

d. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx = 0$.

5. Calculer, pour tout $x > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

A-t-on $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \int_0^{+\infty} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)dx$?

Exercice 2

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x-1} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}.$$

$\mathcal{C}$ désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

a. Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

b. Étudier les variations de f et déterminer ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.
Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

c. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

2. Montrer que l'aire comprise entre la courbe $\mathcal{C}$ et ses asymptotes est finie.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-nx}dx$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n est convergente.

b. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n}$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

c. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $x \geqslant 0$,
$$f(x) = f(x)e^{-nx} + \sum_{k=1}^{n} xe^{-kx}.$$
En déduire que
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \int_0^{+\infty} f(x)dx.$$

4. On pose, pour tout $u > 0$, $J_u = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{ux}-1}dx$ et $K_u = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{ux}+1}dx$.

a. Montrer que pour tout u, les intégrales J_u et K_u sont convergentes.

b. Calculer, pour tout $u > 0$, J_u et K_u en fonction de J_1 et K_1.

c. Établir que $J_1 - K_1 = 2J_2$.

d. Déduire des questions précédentes une relation simple entre J_1 et K_1, puis entre J_u et K_u.

Exercice 3

D'après **EDHEC** 2003.

On note f la fonction définie, pour tout $x > 0$ par $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

1. **a.** Pour tout $n \geqslant 1$, on note $I_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} f(x)dx$. Montrer que l'intégrale I_n est convergente et exprimer I_n en fonction de n.
   b. En déduire que $I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
2. Montrer que la série de terme général $u_n = f(n)$ est convergente.
3. **a.** Établir que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f(k+1) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} f(x)dx \leqslant f(k)$.
   b. En sommant soigneusement cette dernière inégalité, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant I_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}.$$
   c. Déduire des questions précédentes un équivalent simple, lorsque n est au voisinage de $+\infty$ de $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^2}$.

Exercice 4

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt$.

1. Vérifier que pour tout $x > 0$, $f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x+1}$.
2. Donner le sens de variation de f.
3. En utilisant la question **1**, donner la limite de f en $+\infty$.
4. **a.** Démontrer que pour tout $x > 0$, $f(x) + f(x+1) \leqslant 2f(x)$.
   b. Démontrer que pour tout $x > 0$, $f(x) + f(x+1) \geqslant 2f(x+1)$.
   c. En déduire un équivalent simple de f en $+\infty$.